

ПОИСК ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНОГО МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КООРДИНАТ РЕАКЦИЙ

Ю.А. Яцуненко

Применительно к задаче определения координаты взаимодействия частицы с образованием продуктов, имеющих прямые траектории, изложен метод поиска положения главного максимума. Метод основан на минимизации эксцесса функции, симметризованной относительно искомой точки, и позволяет анализировать дискретные функции.

Работа выполнена в Общезинститутском научно-методическом отделении ОИЯИ.

The Search for Global Maximum Position in the Problem of Vertex Reconstruction

Yu. A. Yatsunenکو

In order to determine the vertex position of secondary particles with straight trajectories the method for global maximum search is described. In this method the excess of function symmetrized with respect to the desired point is minimized; that allows one to analyze the discrete functions.

The investigation has been performed at the Scientific-Methodical Division, JINR.

В работе^{/5/} указана возможность определения координат вершин реакций частиц, имеющих прямые траектории, минуя стадию восстановления этих траекторий. В предложенных многоэкстремальных функциях положение главного максимума соответствует вершине (x, y, z) распада или координате взаимодействия (z) первичной частицы, параметры траектории которой обычно определяются достаточно просто.

Законченная схема локализации окрестности главного максимума (ГМ) разработана к настоящему времени лишь для липшецевых функций^{/1/}. Однако в общем случае эта задача весьма трудна, и методы решения таких задач разработаны еще недостаточно, особенно для функций больших размерностей^{/2-4/}. Большинство методов основано на анализе первых трех членов тейлоровского разложения функции. Применение подобных методов для реконструкции многотрековой картины связано с большим объемом вычислительных операций, что при обработке потока событий может приводить к неприемлемым затратам времени ЭРМ.

В настоящей работе предлагается способ поиска ГМ, основанный на возможности аналитического вычисления интегральных моментов положительно определенных функций^{6/}.

Для одномерной функции $f(x)$ ($A < x < B$), имеющей один главный максимум, расположенный вблизи точки u , конструируется симметризованная относительно u функция

$$F(x, u) = \frac{1}{2} \cdot [f(x) + f(2u - x)]. \quad (1)$$

Задача заключается в поиске u , максимально близких к положению ГМ, т.к. при таких u $F(x, u)$ обостряется в окрестности ГМ $f(x)$..

Если для $f(x)$ возможно аналитическое вычисление моментов:

$$\mu_n(f) = \mu_0^{-1}(f) \cdot \int_A^B (x - c)^n f(x) dx, \quad (2)$$

где

$$\mu_0(f) = \int_A^B f(x) dx, \quad c \equiv \mu_1(f) = \mu_0^{-1}(f) \int_A^B x \cdot f(x) dx,$$

то для $F(x, u)$ моменты становятся функциями u :

$$\mu_1(F) = u, \quad \mu_2(F) = \sigma^2 + z^2 \quad (z \equiv c - u), \quad (3a, б)$$

$$\mu_3(F) = 0. \quad \mu_4(F) = \mu_4(f) + z^4 + 4\gamma z + 6\sigma^2 z^2, \quad (3в, г)$$

где c, σ, γ — центр, дисперсия и асимметрия $f(x)$.

Можно предположить, что нужное u минимизирует $\mu_2(F)$, т.е. $u = c$, но это решение выглядит убедительно лишь в случае, когда известно, что $f(x)$ симметрична в ГМ.

Не совсем тривиальным выглядит рассмотрение эксцесса:

$$E(u) = (\sigma^2 + z^2)^{-2} \cdot (z^4 - 2\gamma z + \sigma^2 R_0^2), \quad (z \equiv c - u). \quad (4)$$

где

$$2R_0^2 \equiv 3\sigma^2 - \sigma^{-2} \cdot \mu_4(f) \quad (4a)$$

(величина, характеризующая расстояние между двумя пиками).

Условие на минимум эксцесса (4) приводит к кубическому уравнению для z ,

$$2\sigma^2 z^3 + 3\gamma z^2 - 2\sigma^2 R_0^2 z - \gamma\sigma^2 = 0. \quad (5)$$

Анализ простейшей функции

$$f(x) = A \cdot \pi(x+1) + \pi(x-A), \quad A > 1, \quad |x| < \infty; \quad (6a)$$

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (6b)$$

на минимум эксцесса (4) действительно дает правильный ответ на вопрос о положении ГМ (в данном случае очевидном) — $u = -1$. При таком u эксцесс (4) имеет самое минимальное значение из возможных, соответствующих трем корням уравнения (5).

Можно попытаться обобщить анализ эксцесса для N -мерной функции $f(\vec{r})$, заданной на области V . Для $f(\vec{r})$ конструируем аналог (1):

$$F(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \cdot [f(\vec{r}) + f(2\vec{u} - \vec{r})], \quad (7)$$

где \vec{u} — искомый вектор положения ГМ. Определим моменты для $F(\vec{r}, \vec{u})$

$$\mu_n(F) = \mu_0^{-1}(F) \cdot \int (\vec{r} - \vec{u})^n F(\vec{r}, \vec{u}) dv(\vec{r}) \quad (8)$$

через интегральные характеристики $f(\vec{r})$:

$$\sigma^2 \equiv \int_V (\vec{r} - \vec{c})^2 f(\vec{r}) dv, \quad (9a)$$

$$\vec{\gamma} \equiv \int_V (\vec{r} - \vec{c})^3 f(\vec{r}) dv, \quad (9b)$$

$$K_{mn} = \sigma^2 \delta_{mn} - \int_V f(\vec{r}) (\mathbf{x}_m - \mathbf{c}_m) \cdot (\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_n) dv, \quad (9b)$$

$$2R_0^2 \equiv 3\sigma^2 - \sigma^{-2} \int_V (\vec{r} - \vec{c})^4 f(\vec{r}) dv, \quad (9g)$$

где \vec{c} — центр, σ^2 — полная дисперсия $f(\vec{r})$, $\vec{\gamma}$ — вектор асимметрии, $\hat{K}(K_{mn})$ — матрица "глобальных" корреляций.

Сконструируем скаляр-эксцесс аналогично (4):

$$E(\vec{R}) = (\sigma^2 + R^2)^{-2} \cdot (R^4 - 2\vec{R} \cdot \vec{\gamma} + 2\vec{R} \hat{K} \vec{R} - \sigma^2 R_0^2) \quad (10)$$

$$(\vec{R} \equiv \vec{c} - \vec{u}).$$

Требование минимума $E(\vec{R})$ приводит к условию

$$\frac{2\sigma^2 R^2 + 4\vec{R} \cdot \vec{\gamma} - 4\vec{R} \hat{K} \vec{R} - 2\sigma^2 R_0^2}{\sigma^2 + R^2} \cdot \vec{R} = \vec{\gamma} - 2\hat{K} \vec{R}. \quad (11)$$

Поиск общего решения (11) (например, в разложении по собственным векторам матрицы \hat{K}) представляется сложной задачей (16, с.6). Поэтому можно предложить частное решение

$$\vec{R}(x) = x \cdot \vec{\gamma} / \Gamma \quad (\Gamma \equiv |\vec{\gamma}|), \quad (12)$$

что дает (в общем случае) $3N$ корней (x) уравнения

$$2(\sigma^2 - \lambda_n) x^3 + 3\Gamma x^2 - 2\sigma^2 (R_0^2 - \lambda_n) \cdot x - \sigma^2 \Gamma = 0 \quad (13)$$

(λ_n — собственные значения матрицы \hat{K}). По аналогии с примером (6) среди этих корней можно выбрать один, соответствующий минимальному значению эксцесса (10).

Однако этот корень не всегда располагается вблизи окрестности ГМ как для многомерных, так и для одномерных функций. Подобная ситуация возникает для функций "сложного" рельефа, когда нарушается известная трактовка асимметрии: если $\gamma > 0$, то слева от центра — большой пик, а справа — длинный хвост.

Тем не менее среди всех решений (5, 13) существует одно, расположенное наиболее близко к положению ГМ. К настоящему времени не найдены достаточно общие правила выбора "правильного" корня.

Также не решена до конца задача создания универсальной итерационной процедуры (последовательного сужения области интегрирования вокруг положения ГМ), хотя параметр R_0^2 (4а, 10г) позволяет сформулировать правило окончания итерационного процесса: если $R_0^2 \leq 0$, то в данной области функцию можно считать унимодальной (16, с.8).

Критический анализ этих нерешенных проблем позволил бы ответить на вопрос о границах применимости подобного подхода поиска положения ГМ, что особенно актуально для многомерных функций, в частности для функции координат вершины распада.

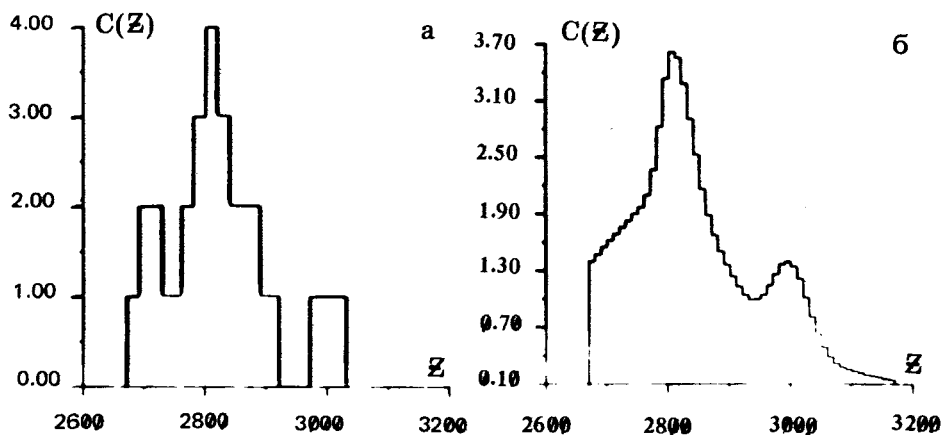


Рис.1. Функция координаты реакции z , построенная а – на основе дискретной функции точности (14а), б – на основе гладкой функции точности (14б).

Тем не менее вариант итерационной процедуры, изложенный в работе ^{6/} (с.10, 11), позволил найти положение ГМ для достаточно сложных тестовых двумерных и одномерных функций. Кроме того, эта итерационная процедура позволила на экспериментальном материале реализовать возможность определения вершин реакций заряженной частицы с мишенью (с образованием продуктов, имеющих прямые траектории) без восстановления вторичных траекторий.

На рис.1а,б представлена функция $C(z)$ (^{5/}, с.6), где z — координата реакции первичной частицы — ядра магния (для отдельного события). Положение главного максимума $C(z)$ соответствует месту реакции. Несколько вторичных частиц дали отсчеты в детекторах — пропорциональных камерах; каждому отсчету сопоставлялась функция точности

$$G(x; s) = \begin{cases} (2s)^{-1}, & |x| \leq s, \\ 0, & |x| > s, \end{cases} \quad (14a)$$

или

$$G(x; s) = (2\pi s^2)^{-1/2} e^{-x^2/2s^2}, \quad (14б)$$

где s — размер кластера (несколько соседних сработавших проволочек пропорциональной камеры) измеренной координаты (центр кластера). Сложности применения изложенной схемы поиска положения ГМ, связанные с интегрированием, были преодолены путем применения дискретной функции (14а). На рис.1а

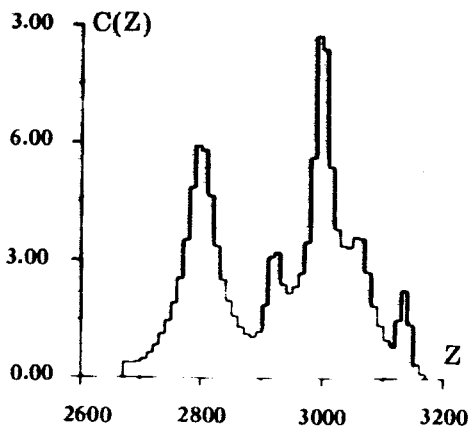


Рис.2. Функция координат двух взаимодействий смоделированного события.

приведена соответствующая "дискретная" функция $C(z)$. Приближенное значение положения ГМ $z = 2780$ мм использовалось для обычного локального уточнения положения ГМ функции, изображенной на рис.16 (функция точности — гладкая (146)); получено $z = 2809$ мм. Поиск приближенного положения ГМ (с использованием дискретной функции точности) занимал в среднем 0,036 с процессорного времени ЭВМ ЕС-1061 при восстановлении вершины взаимодействия (z) с образованием 2-4 вторичных частиц в отдельном событии. Локальное уточнение положения ГМ (функция точности — гладкая) увеличивало это время на 60%. Для восстановления траекторий этих же событий и последующего определения вершин традиционным способом требовалось ~ 0,110 с на событие.

Можно отметить особенность изложенного метода поиска положения ГМ применительно к задаче поиска вершин реакций: среди трех корней уравнения (5) два могут указывать на два самых больших максимума анализируемой функции. На рис.2 приведена функция вершин взаимодействия смоделированного события: образование первичной частицей трех вторичных, одна из которых, "нейтральная" (не дала отсчетов в детекторе), имеет параметры траектории, идентичные параметрам первичной, и последующее взаимодействие "нейтральной" с образованием трех заряженных. Решения уравнения (5) (в приближении дискретной функции точности) после первой итерации близки к заданным вершинам (2800 мм, 2000 мм): $z_1 = 2838$ мм, $z_2 = 3017$ мм.

В заключение автор выражает благодарность за поддержку в работе А.Б.Кузнецову и Ю.Л.Обухову.

Литература

1. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд. МГУ, 1974, с.47.
2. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986, с.49.

3. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моуллер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, с.196.
5. Яцуненко Ю.А. ОИЯИ, Р1-88-29, Дубна, 1988.
6. Яцуненко Ю.А. ОИЯИ, Р5-88-74, Дубна, 1988.

Рукопись поступила 15 ноября 1988 года.